東北大学　名古屋大学

平成 25 年 7 月 17 日

東北大学電気通信研究所
名　古　屋　大　学

ハイゼンベルクの測定誤差と擾乱に関する不確定性関係の破れの実験的検証に成功 ―光を用いた小澤の不等式の新たな検証実験―

＜概要＞

東北大学電気通信研究所・枝松圭一教授，名古屋大学大学院情報科学研究科・小澤正直教授らの研究グループは，量子力学の基本原理のひとつである「測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」として知られるハイゼンベルクの関係式が破れており，小澤教授が発見した新しい関係式が成立していることを，光を用いた実験で明瞭に検証することに成功しました。

量子力学では，二つの物理量（例えば位置と運動量）の測定に関して，一方の物理量の測定誤差と，その測定によって他方の物理量が乱される量（擾乱）との間には，一般に，一方を小さくしようとすれば他方を犠牲にしなければならないトレードオフの関係があるとされています。この関係は，1927 年にハイゼンベルクによって提唱された「ハイゼンベルクの不等式」と呼ばれる関係式によって表現され，「測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」として知られてきました。従来はこの関係式が一般的に成立するものと思われてきましたが，小澤は，ハイゼンベルクの不等式は無条件に成立するものではないこと，運動量を乱さずに位置の測定が可能な特別な場合があることを理論的に明らかにし，2003 年にハイゼンベルクの不等式に代わって常に成立する新たな関係式（小澤の不等式）を提唱しました。

本研究グループは，光の粒子である光子の偏光について，測定の強さを連続的に変化させながら誤差と擾乱を計測する実験系を準備し，縦横方向の偏光の測定誤差と，その測定によって斜め 45 度方向の偏光が受ける擾乱の関係を実験的に計測しました。そして，それらの間の関係を調べた結果，ハイゼンベルクの不等式が明瞭に破れ，小澤の不等式が成立していることが検証されました。

ハイゼンベルクの不等式の破れと小澤の不等式の検証については，昨年来，中性子や光を用いた実験で報告されていますが，測定方法が限られていたことや，誤差や擾乱の計測精度が低い等の問題がありました。今回の実験結果は，測定の強さを変化させる一般的な測定においてもハイゼンベルクの不等式が破れ，小澤の不等式が成立していることを明瞭に検証したもので，「測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」という量子力学における基本原理の見直しとなることはもちろん，従来のハイゼンベルクの不等式の限界を超えた超精密測定技術や普遍的な誤差・擾乱関係に基づく新たな量子情報通信技術の開発が期待されます。また，我が国の研究者が発見した基本的かつ重要な理論提案が我が国において実験的に検証されたという点においても，我が国の科学技術史上特筆すべき成果と考えられます。

この研究成果は，2013 年 7 月 17 日（英国時間）に発行されるオープンアクセス科学誌「Scientific Reports」（Nature Publishing Group）に掲載される予定です。

＜研究の背景＞

ミクロな世界を支配する物理学の基本原理である量子力学では，二つの物理量（例えば位置と運動量）の測定に関して，一方の物理量の測定誤差と，その測定によって他方の物理量が乱される量（擾乱）との間には，一般に，一方を小さくしようとすれば他方を犠牲にしなければならないトレードオフの関係があるとされています。1927 年，ハイゼンベルクは，有名な「ガンマ線顕微鏡の思考実験」において，物体の位置（x）を非常に精密に測定しようとすると，測定に伴う反作用によって物体の運動量(p)が不可避的に乱されてしまうことを見出し，位置測定の誤差(ε(x))と運動量の擾乱（η(p)）との間には次の関係式が成立するものと考えました。

$$\varepsilon(x)\eta(p) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

この関係式を一般の物理量 A と B に拡張したものが

$$\varepsilon(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle [A, B] \right\rangle\right| \tag{2}$$

です（注 1)。これらの関係式(1)および(2)は，「ハイゼンベルクの測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」または単に「ハイゼンベルクの不等式」と呼ばれています（注 2)。従来，これらの式は一般的に成立するものと思われてきましたが，小澤は，ハイゼンベルクの不等式は無条件に成立するものではないこと，更に，運動量を乱さずに位置の測定が可能な特別な場合があることを理論的に見出し，2003 年，ハイゼンベルクの不等式に代わって常に成立する新たな関係式

$$\varepsilon(A)\eta(B) + \varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle [A, B] \right\rangle\right| \tag{3}$$

を提唱しました（σ(A), σ(B)の意味については注 2 を参照)。この関係式は，「ハイゼンベルク＝小澤の測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」または単に「小澤の不等式」と呼ばれています。この小澤の不等式によって，測定誤差と擾乱の間のトレードオフの存在が初めて一般的に証明され，その正しい姿が明らかになりました。これまでに保存法則による精密測定の限界や量子計算の精度限界の導出などに応用され，また，新しい量子通信技術への応用が研究されています。このように小澤の不等式は，従来，信じられてきたハイゼンベルクの不等式(2)を置き換えるという非常に重要な発見であり，その実験的検証が待たれていました。

昨年来，中性子や光を用いた実験によって，ハイゼンベルクの関係式(2)の破れと小澤の不等式(3)の実験的検証についての報告がなされ，大きな話題となっています。しかし，それらは測定方法が限られていたことや，誤差や擾乱の計測精度が低い等の問題があり，より一般的かつ明瞭な実験による検証が望まれていました。

＜研究の方法＞

東北大学電気通信研究所の研究グループは，光の量子状態の計測・制御やその量子情報通信技術への応用において，多くの重要な成果をあげています。今回の研究では，光の量子である「光子」（注３）の偏光（注４）を用い，誤差と擾乱に関するハイゼンベルクと小澤の２つの不等式に対する実験的検証を行いました。まず，光子の偏光を完全に正確に測定する「強い測定」から，何も測定しない「無測定」まで，その中間の「弱い測定」も含め，測定の強さ（精度）を連続的に変化させることができる実験系（図 1）を開発しました。また，測定誤差と擾乱の計測には，

小澤が発案した３状態法と呼ばれる方法を，光を用いた計測系として初めて採用しました。この実験系は，従来の報告例における実験に比べ，測定強度を変化させるというより一般的な測定を採用していることに加え，格段に明瞭な結果が得られることが特長です。この技術を用いて初めて，測定誤差と擾乱に関するハイゼンベルクと小澤の２つの不等式についてのより一般的かつ明瞭な検証実験が可能になりました。

＜成果の内容＞

図２に，縦横方向の偏光測定の強度を変化させたときの，「縦横方向の偏光測定における誤差」および「その測定によって斜め 45 度方向の偏光が受ける擾乱」の計測結果を示します。測定強度が大きくなるに伴い，誤差は減少する一方，擾乱は増大し，両者の間にトレードオフの関係があることがわかります。

図３に，測定の強度を変化させたときの，誤差および擾乱に関するハイゼンベルクの不等式(2)の左辺，および小澤の不等式(3)の左辺を表します。この実験では，不等式の右辺はどちらも 1.0 になります。図から明らかなように，ハイゼンベルクの不等式の左辺は右辺を下回り，不等式(2)が破れているのに対し，小澤の不等式(3)は保たれていることがわかります。

これらの結果により，光の偏光に関する測定強度を変化させるという，従来よりも一般的な測定（一般化測定，POVM 測定などと呼ばれる）においても，測定誤差と擾乱に関するハイゼンベルクの不等式(2)が破れ，小澤の不等式(3)が成立していくことが明らかとなりました。

＜研究の意義および今後の展開＞

量子力学が誕生してほぼ 100 年となりますが，小澤の不等式の提案は，量子力学の根本にありかつよく知られた性質である「不確定性関係」に対して，100 年来の常識を置き換えるという非常に重要なものです。本研究においては，光という身近な存在を用いて，測定に伴う誤差と擾乱を精密かつ明瞭な形で計測し，ハイゼンベルクの不等式が破れる場合があること，そしてそのような場合でも常に小澤の不等式が成立することを明らかにしました。本研究の成功は，物理のみならず科学技術一般に広く行われる「測定」という行為に対し根本的な制限を課す「不確定性関係」への見直しとなることはもちろん，従来の不確定性関係の枠を超えた超精密測定技術や新たな量子情報通信技術の開発などの多くの応用を拓くものであり，量子物理の基礎のみならず応用上もたいへん重要な成果です。

一方，注２にも記したように，小澤の不等式とその検証実験の意味するところに対しては大きな誤解も生じています。学会においても，小澤らの研究を契機として，「不確定性関係」の研究に関して新たな議論と展開が生まれようとしています。量子力学や不確定性という問題は，一般の方にも大変興味深い話題であると同時に十分には理解され難いところも多く，本研究や関連研究の結果とその意味するところについては，適切な広報活動によって一般の方々にも正しく理解して頂けるように努めることが必要だと考えています。

今回の研究では，１個１個の光子の偏光の測定における誤差と擾乱を計測し，その関係がハイゼンベルクの不等式を破ることを検証し，小澤による新しい不等式を満たしていることを観測しました。光子の偏光は，各々の測定結果は２通り（例えば縦偏光と横偏光のどちらか）となる点で，電子や中性子における「スピン」と同じ２次元系とみなされる状態です。今後は，さらに次元の高い物理状態や，ハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡の思考実験で出てくる位置と運動量などのように，連続的な値を取り得る物理状態に対する不確定性を検証する実験にも取り組みたいと

考えています。そのような研究を通して，不確定性に関するさらなる理解と応用が広がるものと期待しています。

＜研究助成資金等＞

- 日本学術振興会 科学研究費補助金 22244035（研究代表者：枝松圭一）
- 日本学術振興会 科学研究費補助金 21244047, 22654013（研究代表者：小澤正直）
- 文部科学省・日本学術振興会グローバル COE プログラム「情報エレクトロニクスシステム教育研究拠点」（東北大学，拠点リーダー：安達文幸）
- 総務省　戦略的情報通信研究開発推進制度(SCOPE) 121806010（研究代表者：小澤正直）
- John Templeton 財団・研究助成 35771（研究代表者：小澤正直）

＜掲載論文名＞

"Experimental violation and reformulation of the Heisenberg's error-disturbance uncertainty relation"（ハイゼンベルクの誤差–擾乱の不確定性関係の破れと再定式化の実験）

So-Yong Baek, Fuminhiro Kaneda, Masanao Ozawa, and Keiichi Edamatsu

Scientific Reports（Nature Publishing Group） 2013 年 7 月 17 日（英国時間）

＜参考図＞

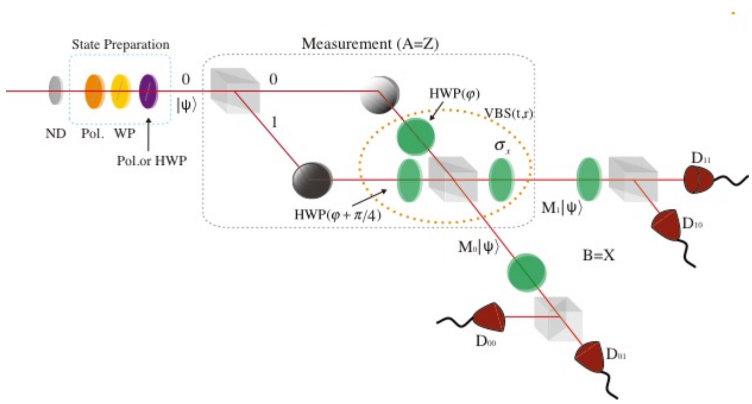

図1. 光子の偏光を用いた測定誤差と擾乱の計測装置。中央の枠で囲んだ部分が，縦横方向の偏光の測定部で，測定結果に応じて二つの異なる光路に光子が出力される。光学素子（HWP）の調節によって，測定強度を変化させることができる。2光路のどちらかに出力された光子は，次の測定部で斜め45度方向の偏光測定が行われる。ここで各々がさらに2光路に分かれ，最後に4台の検出器のいずれかで検出される。光子がどの検出器で検出されたかによって，縦横および斜め45度方向の測定結果がわかる。

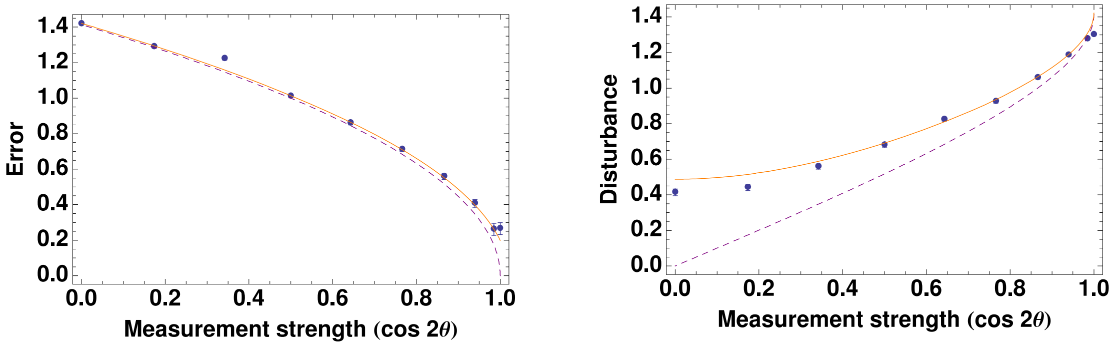

図2．縦横方向の偏光測定の強度（横軸）を変化させたときの，縦横方向の偏光測定における誤差（左）および斜め 45 度方向の偏光測定の擾乱（右）。丸印が計測結果で，測定強度が大きくなるに伴い，誤差は減少する一方，擾乱は増大する。破線は理想的測定装置の理論値，実線は実際の測定装置の性能を加味した理論値。

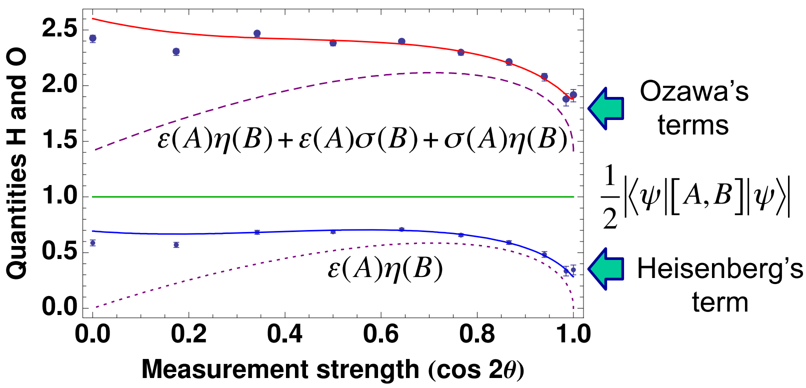

図3．測定の強度（横軸）を変化させたときの，誤差および擾乱に関する新旧の不等式の成立状況。丸印，破線および実線の意味は図 2 と同じ。下部のデータがハイゼンベルクの不等式(2)の左辺，上部のデータが小澤の不等式(3)の左辺。不等式の右辺はどちらも 1.0 であり，中央の実線で表す。ハイゼンベルクの不等式の左辺は右辺を下回り，不等式(2)が破れているのに対し，小澤の不等式(3)は保たれている。

＜用語説明＞

注１）式(2)の説明

量子力学では，物理量（位置や運動量など）は波動関数に作用する「演算子」として扱われる。二つの演算子 A と B を考えたとき，AB=BA が成立するとき，それらは「交換する」という。また，$[A,B]\equiv AB-BA$ を「交換子」と呼ぶ。$\langle .....\rangle$ は，対象の物理状態に対する平均値を表す。(2)式から，A と B が交換するとき，右辺は 0 となって，A の誤差（ε(A)）と B の擾乱（η(B)）はどちらも 0 となり得ることがわかる。ところが，A と B が交換しないときには，右辺は一般的に 0 ではなく， A の誤差（ε(A)）と B の擾乱（η(B)）との間に，一方が小さいと他方が大きくなる（特に，一方が 0 であれば他方は無限大となる）トレードオフ

の関係があることがわかる。

注２）二種類の「ハイゼンベルクの不等式」（あるいは「ハイゼンベルクの不確定性関係」）

(1)および(2)式は，測定誤差と擾乱に対するハイゼンベルクの不等式であり，本文で述べたガンマ線顕微鏡の思考実験に対応する不等式である。一方，同じくハイゼンベルクの不等式と呼ばれるもう一つの不等式が存在する。それは

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle [A,B] \rangle\right| \tag{*}$$

と表される。右辺は(2)式と同じであるが，左辺の σ(A), σ(B) は各々，対象の物理状態における A および B のゆらぎ（A と B をそれぞれ独立に観測したときに得られる結果のばらつきを標準偏差で表したもの）である。これらは，(2)式における測定誤差と擾乱とは全く別の量であり，(2)と(*)とは物理的に異なることがらを表している。にもかかわらず，どちらも同じく「ハイゼンベルクの不等式」（あるいは「ハイゼンベルクの不確定性関係」）と呼ばれているために，相当の混乱が生じている。(*)はロバートソンによって数学的に証明されており（従って常に成立する），「ロバートソンの不等式」とも呼ばれる。測定誤差と擾乱に関する不等式(2)は，(*)にさらにある仮定を加えて導かれるという関係にある。従って，(2)はそのような仮定の下でのみ成立するものであり，仮定が満たされないときには（本研究で検証したように）破れる場合がある。量子力学の初等的教科書では大抵，(*)をハイゼンベルクの不確定性関係と呼び，(2)と区別していないため，大きな混乱を招いている。本研究で「ハイゼンベルクの不確定性関係」の破れを検証したのは(2)式についてであり，(*)式ではないことに特に注意されたい。

注３）光子

光の量子．光量子ともいう。

注４）偏光

光の波（電磁波）としての振動方向を偏光という。１個の光子の偏光状態は，１つのスピンのように振る舞い，量子情報の基本単位である量子ビット（キュービット）としても利用される。光子の縦横方向の偏光測定の演算子と，斜め 45 度方向の偏光測定の演算子とは交換しない（注１参照）ため，(2)あるいは(3)式の右辺が 0 ではなくなり，測定誤差と擾乱に関する不確定性関係の検証に利用できる。