

ARTICLE OPEN

Soundness and completeness of quantum root-mean-square errors

Masanao Ozawa 

Locally uniform quantum root-mean-square error:

$$\bar{\epsilon}(A) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(A - M_A)e^{-itA}|\psi\rangle\|$$

Soundness and completeness:

$$\bar{\epsilon}(A) = 0 \quad \text{if and only if} \quad \Pr\{A = M_A \mid |\psi\rangle\} = 1$$

Universally valid uncertainty relation:

$$\bar{\epsilon}(Q)\bar{\epsilon}(P) + \bar{\epsilon}(Q)\sigma(P) + \sigma(Q)\bar{\epsilon}(P) \geq \frac{\hbar}{2}$$

量子測定の誤差を定義する問題を解決 ～「量子測定の『誤差』って何？」に答える～

名古屋大学の 小澤 正直 名誉教授は、株式会社インターネット総合研究所との共同研究プロジェクトにおいて、古典物理学で標準的に使われている測定誤差の定義を「量子測定」に拡張する問題を解決しました。量子物理量の値を実験によって決定する「量子測定」には、「波束の収縮^{注1)}」と呼ばれる量子力学特有の現象が伴うことから、古典物理学で確立された測定誤差の概念をそのまま適用することができません。そのため、古典物理学の定義を拡張するいくつかの方法が試みられてきましたが、従来の方法では、不正確な測定の測定誤差がゼロになるという不完全性があり、量子測定の測定誤差を完全に定義することは困難な課題とされてきました。本研究で初めて、そのような問題点を克服する量子測定の測定誤差に対する定義が与えられました。本研究成果は、あらゆる量子測定にあてはまる測定誤差の標準的定義を確立し、とりわけ、ハイゼンベルクの不確定性原理^{注2)}の精密な定量化に確実な基礎を与え、量子暗号や量子コンピュータなどの量子情報技術^{注3)}の精度評価に役立つことが期待されます。この研究成果は、平成31年1月15日付（日本時間19時）英国科学誌「ネイチャーパートナージャーナル・クァンタムインフォメーション」にオンライン掲載されました。

この研究は、平成28年度から始まった株式会社インターネット総合研究所『名古屋大学共同研究プロジェクト：量子情報論・量子基礎論とその人工知能等情報科学への応用に関する研究』の支援のもとで行われたものです。また、本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業 JP26247016, P17K19970 の助成を受けたものです。

【ポイント】

1. 測定誤差の定義を与え、実際の実験でそれを計測することは、実験科学における最も基本的な方法であるにも関わらず、これまで、量子測定に対する満足のいく測定誤差の定義は知られていませんでした。本研究では、この問題を解決して、あらゆる量子測定にあてはまる測定誤差の標準的定義を発見しました。
2. 古典物理学では、測られるべき物理量の値は測定と独立に存在していますが、量子測定では、物理量の値が測定によって現れるように見える「波束の収縮」という量子力学特有の現象があり、古典的誤差概念をそのまま当てはめることはできません。
3. そのため、古典物理学の定義を拡張するいくつかの方法が試みられてきましたが、従来の方法では、不正確な測定の測定誤差がゼロになるという不完全性があり、量子測定の測定誤差を完全に定義することは困難な課題とされてきました。
4. 本研究では、量子測定に対する誤差概念が満たすべき条件を、I. 操作的定義可能性、II. 対応原理、III. 健全性、IV. 完全性の4つの数学的条件に整理し、従来の定義は I から III を満たすが、IV を満たさないことを明らかにしました。ここで、I は誤差の値が測定装置の操作的性質から決まること、II は古典的定義があてはまる場合はその値と矛盾しないこと、III は正確な測定の誤差の値はゼロであること、IV は不正確な測定にはゼロでない誤差の値が与えられることを意味します。
5. そこで、従来の定義を I から III を満たしたまま、更に IV を満たすように改良する「局所一様化^{注4)}」という方法を導入して、I から IV の全ての条件を満たす量子測定の新しい誤差概念「局所一様誤差^{注5)}」を導きました。
6. ハイゼンベルクの不確定性原理を書き換える「小澤の不等式^{注6)}」や、それを改良した「ブランシアードの不等式^{注7)}」は、従来の誤差概念に基づいて導かれていましたが、そのままの形で「局所一様誤差」に対しても成立することが示されました。
7. 「小澤の不等式」や「ブランシアードの不等式」の検証実験が光の偏光測定やスピン測定などに対して行なわれましたが、これまでの検証実験が行なわれたケースでは、従来の定義による誤差と「局所一様誤差」の値は一致することが示され、新たな検証実験を行なう必要がないことが示されました。
8. 本研究成果は、あらゆる量子測定にあてはまる誤差の標準的定義を確立し、とりわけ、近年著しく研究が進展しているハイゼンベルクの不確定性原理の精密な定量化に確実な基礎を与え、量子暗号や量子コンピュータなどの量子情報技術の精度評価に広く応用されることが期待されます。

【研究背景と内容】

測定に対する誤差概念を定義し、それを計測することは、物理学をはじめとする実験科学における最も基本的な研究方法の一つです。古典物理学では、19世紀の初めにガウスによって定義された二乗平均平方根誤差^{注8)}の概念が、200年にわたって標準的な定義としてあらゆる測定に広く使われてきました。

しかしながら、量子物理学においては、量子測定に対する誤差概念を定義することは極めて難しい問題であることが明らかになってきました。この問題はとりわけ、「小澤の不等式」に代表されるハイゼンベルクの不確定性原理を現代的に再検討する最近の

研究の中で明らかにされてきました。

この研究では、従来、「誤差作用素^{注9)}」にもとづく定義が使われてきましたが、この定義による誤差では、ある種の不正確な量子測定の誤差が見逃されて、測定が不正確であるにもかかわらず、その測定の誤差の値がゼロになるケースがあることが知られるようになりました。そのため、このような欠点を取り除き、十分に信頼のおける誤差概念を確立することが量子物理学における喫緊の課題になりました。

誤差とは、通常、「真の値と測定した値との差」として定義されます。「小澤の不等式」や「ブランシードの不等式」など、不確定性原理の従来の定量的表現である「ハイゼンベルクの不等式」を書き改める最近の研究では、「誤差」を「メーターの値と測りたい物理量の値の差の二乗平均の平方根」と定義して、誤差に関する不等式を導きました。「メーターの値と測りたい物理量の値の差」を表す物理量を「誤差作用素」と呼ぶので、この定義は「誤差作用素にもとづく誤差^{注10)}」と呼ばれます。

この誤差の定義は、一見当たり前のようでも、実は量子力学特有の不可解な問題を含んでいます[1]。私たちが通常経験する古典的な世界では、物理量の値は測る前から一つに決まっていますが、量子力学では、そうではなく、値が測定に伴って現れるように見える「波束の収縮」という現象があるからです。このような場合に、測定前の物理量の真値が何かはよくわからないということになります。実際、「誤差作用素にもとづく誤差」がゼロであるにも関わらず、測定が正しくない、つまり、メーターの値と測りたい物理量の値が一致しているとは考えられない場合があることが知られるようになりました。それとともに、量子測定の誤差を合理的に定義することは不可能ではないか、という意見も表れるようになりました。

本研究では、古典的なガウスの二乗平均平方根誤差を量子測定に拡張するために必要な要求を数学的に明らかにし、それらの要求をすべて満たす新しい誤差概念が存在することを明らかにしました。つまり、量子論的な二乗平均平方根誤差 ε とは、次の条件を満たすものです。

- I. 操作的定義可能性：誤差 ε の値は、測定される物理量、測定の行なわれる量子状態、および、測定装置の操作的な性質によって定まる。
- II. 対応原理：メーターの値と測りたい物理量の値がともに存在する場合は、誤差 ε の値は古典的な二乗平均平方根誤差に一致する。
- III. 健全性：メーターの値と測りたい物理量の値がともに存在して一致する場合は、誤差 ε の値はゼロである。
- IV. 完全性：誤差 ε の値がゼロならば、メーターの値と測りたい物理量の値がともに存在して一致する。

ここで、「メーターの値と測りたい物理量の値がともに存在する」とは、数学的には「両者の結合確率分布^{注11)}が存在する」と言い替えることができます。また、「メーターの値と測りたい物理量の値がともに存在して一致する」ということが「正確な測定」を特徴付ける条件になっています。

すると、「誤差作用素にもとづく誤差」は、I、II、IIIの性質を持つが、IVの性質を持たないことが示されます。また、近年、「誤差作用素にもとづく誤差」に代えて提案された「ヴァッサーシュタイン距離^{注12)}に基づく誤差」は、I、IIIの性質を持つが、

II、IVの性質を持たないことが示されました。

本研究では、「誤差作用素にもとづく誤差」を改良する「局所一様化」という方法を導入し、「誤差作用素にもとづく誤差」を局所一様化することによって新たに定義された「局所一様誤差」は、IからIVの全ての性質を兼ね備えた健全かつ完全な誤差概念であることが示されました。

本研究では、「局所一様誤差」以外にもIからIVの全ての性質を兼ね備えた誤差概念が存在することが得られましたが、「局所一様誤差」は、さらに次の好ましい性質を兼ね備えています。

- これまでの「誤差作用素に基づく誤差」に対して導かれた「小澤の不等式」や、それを改良した「ブランシアードの不等式」および「ハイゼンベルクの不等式」が成り立たない例（反例）等の研究成果は、そのままの形で「局所一様誤差」に対しても成立します。従って、「局所一様誤差」に対して新しい不等式や新しい反例を導く必要はありません。
- これまで「小澤の不等式」や「ブランシアードの不等式」の検証実験が行なわれたスピンの測定に対しては、「誤差作用素に基づく誤差」と「局所一様誤差」の値は一致します。従って、「局所一様誤差」に対してそれらの不等式の新たな検証実験を行なう必要もありません。

このように、「局所一様誤差」は「誤差作用素に基づく誤差」の欠陥を修正した完全な誤差概念でありながら、「誤差作用素に基づく誤差」に関して得られた研究成果をそのまま受け継ぐという望ましい性質を持っています。

この研究によって、一部で主張されていた「ハイゼンベルクの不確定性原理が成立しない場合がある」という主張は誤差の選び方が悪いからではないか」という疑問や『小澤の不等式』や『ブランシアードの不等式』に現れる誤差は正しい測定を完全に特徴付けていないから信頼性に欠ける」という批判を一掃することができました。

今後、「局所一様誤差」の概念は、あらゆる量子測定にあてはまる誤差の標準的定義として広く利用されることが期待されます。とりわけ、「小澤の不等式」に代表される、近年著しく研究が進展しているハイゼンベルクの不確定性原理の精密な定量化に関する研究に確実な基礎を与え、量子情報技術の精度評価に広く応用されて、量子暗号や量子コンピュータの進歩に貢献することが期待されます。

参考記事

[1] 日経サイエンス(オンライン版)「News Scan:『誤差』って何?～日経サイエンス2012年6月号より」(古田彩) <<http://www.nikkei-science.com/?p=23015>> (2019年1月11日閲覧)

【成果の意義】

1. 量子測定に対する誤差概念が満たすべき健全性、完全性等の性質を明らかにしました。
2. 健全性と完全性を兼ね備え、あらゆる量子測定にあてはまる誤差の標準的定義を初めて明らかにしました。

3. ハイゼンベルクの不確定性原理の不備を改める「小澤の不等式」や「ブランシアードの不等式」が健全性と完全性を兼ね備えた新しい誤差概念について成立することが示され、不確定性原理の定量的表現に確実な基礎が与えられました。
4. 量子暗号や量子コンピュータなどの量子情報技術の精度評価に広く応用されることが期待されます。

【用語説明】

- 注1) **波束の収縮**：量子力学では一般に、測定値は確率的にしか予言できないが、測定によって、測定された対象が測定値を確実に持つ状態に移行すること。ハイゼンベルクの時代には、正確な測定は必ずこのような状態変化を伴うと仮定されていて、ハイゼンベルクの不等式もそのような仮定のもとで導かれた。現在は、正確な測定に対して、より一般の状態変化が伴うことが知られるようになった。
- 注2) **ハイゼンベルクの不確定性原理**：位置と運動量のように相補的な二つの物理量を同時に正確に測定することはできないことをいう。二つの測定値の平均誤差の積はプランク定数に比例する一定値より小さくなり得ないという「ハイゼンベルクの不等式」で定量的に表現される。近年の研究では、ハイゼンベルクの不等式が成り立たない場合があることが示され、一般的には「小澤の不等式」やそれを改良した「ブランシアードの不等式」で定量的に表現されることが明らかにされた。
- 注3) **量子情報技術**：従来の情報技術は、電波や電気信号等の古典物理学的性質を利用してきたが、近年、光や電子などの量子物理学的性質を積極的に利用して、無条件に安全な「量子暗号」や超高速計算を可能にする「量子コンピュータ」など、従来の情報通信技術では達成できなかった高度な情報処理や情報通信の技術が現れた。それらを総称して、量子情報技術と呼ぶ。
- 注4) **局所一様化**：測定される物理量を保存量とする1径数変換群で初期状態を変換して得られる最も大きな値を、新たにその初期状態に対する誤差の値とすること。
- 注5) **局所一様誤差**：誤差作用素に基づく誤差を局所一様化して得られる平均誤差の定義。メーターの値と測りたい物理量の値の結合確率が存在する場合は、誤差作用素に基づく誤差と一致する。存在しない場合は、一般により大きな値を取り、不正確な測定に対する値がゼロという欠陥を持たない。
- 注6) **小澤の不等式**：ハイゼンベルクの不等式が成り立たない場合でも成り立つように改良した同時測定の誤差と測定される物理量のゆらぎとの関係を表す不等式。測定誤差としては、誤差作用素に基づく誤差が用いられた。
- 注7) **ブランシアードの不等式**：小澤の不等式を改良して、さらに強力にした不等式。測定誤差としては、誤差作用素に基づく誤差が用いられた。
- 注8) **二乗平均平方根誤差**：真の値と測定値の差の二乗の平均の平方根で定義される古典物理学における標準的測定誤差の概念。二乗平均平方根誤差がゼロであることと、測定が正確であること、つまり、測定値と真の値が一致することが同等である。19世紀の初めにガウスによって導入された。
- 注9) **誤差作用素**：測定される物理量と測定値を与えるメーターの物理量の差として定義される量子物理量。

注10) **誤差作用素に基づく誤差**：誤差作用素の二乗平均の平方根で定義される量子測定のア平均誤差の概念。

注11) **結合確率分布**：二つの物理量のすべての値の組に対する確率分布。古典物理学では、任意の二つの物理量の結合確率分布が存在するが、量子物理学では、結合確率分布が存在しない場合があることが知られている。

注12) **ヴァッサーシュタイン距離に基づく誤差**：測定される物理量の確率分布と測定値を与えるメーターの物理量の確率分布との間の数学的に定義された距離で定義される測定誤差。

【論文情報】

雑誌名：npj Quantum Information (npj:Nature Partner Journalの略称)

論文タイトル：“Soundness and completeness of quantum root-mean-square errors”

著者：Masanao Ozawa (小澤 正直)

DOI：[10.1038/s41534-018-0113-z](https://doi.org/10.1038/s41534-018-0113-z)