

問 題 紙

- 1 正の整数 n に対し
- $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$
- とする。
- (1) I_1 を求めよ。必要ならば $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$ を使ってよい。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 I_n を I_{n-2} と n で表せ。
- (3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。 D を底面とし、点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。 C を平面 $x = \frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき、小さい方を S とする。 z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。
- 2 空間内に $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり、点 B と点 C は P 上にはなく、 P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B', C' とする。
- (1) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$ を示せ。
- (2) $\angle B'AC' > \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) P 上の三角形 $AB'C'$ の辺の長さは短いものから $4, \sqrt{21}, 7$ であった。このとき、辺 AB の長さを求めよ。
- 3 正の整数 n の正の平方根 \sqrt{n} は整数ではなく、それを 10 進法で表すと、小数第 1 位は 0 であり、第 2 位は 0 以外の数であるとする。
- (1) このような n の中で最小のものを求めよ。
- (2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。
- 4 正の整数 n に対して $1, 2, \dots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを (a_1, a_2, \dots, a_n) とする。この (a_1, a_2, \dots, a_n) に対し、各添字 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 a_i の値が j であるとき、その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \rightarrow a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow \dots$ のようにたどり、それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき、
- (i) $a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 5 \rightarrow a_5 = 4 \rightarrow a_4 = 1 \rightarrow a_1 = 2$
- (ii) $a_3 = 6 \rightarrow a_6 = 3 \rightarrow a_3 = 6$
- (iii) $a_7 = 7 \rightarrow a_7 = 7$
- となり、どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル、列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。
- (1) $n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。
- (2) $n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。
- (3) n 以下の正の整数 k に対して
- $$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$
- を示せ。
- (4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\frac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または0)

2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

5. $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分する点, および外分する点: $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(ベ ク ト ル)

10. 2つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

(複素数)

11. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
12. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
13. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が α, β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α, β, γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対数)

16. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三角関数)

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
18. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
19. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
20. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$
21. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
22. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数列)

23. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\}$, ($l = a + (n-1)d$)
24. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(微 積 分)

28. $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$, $y = y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

33. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x dx = x \log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0)$, $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} (a \neq 0)$, $\int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta - a)^3$

37. 回転体の体積: $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

38. 曲線の長さ: $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$, ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$)

(順列・組合せ)

39. ${}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}$, ($1 \leq r \leq n-1$)

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$

(確 率)

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率: $P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}$, ($q = 1 - p$)

42. 期待値: $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$, ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ をみたすとする。