

持続可能社会に貢献！「手のひらの上で動く」低温度差スターリングエンジンの回転メカニズムを理論的に説明

名古屋大学大学院情報学研究科の泉田 勇輝 助教は、低温度差スターリングエンジン^{注1)}を非線形力学系^{注2)}としてモデル化し、その回転メカニズムを理論的に説明しました。

低温度差スターリングエンジンは、手のひらの温かさと室温程度の温度差で動くエンジンです。このような身の回りの熱エネルギーを有効利用するテクノロジーは、持続可能社会のための基礎的なテクノロジーとして重要です。これまで、より低温度差で動くエンジンを目指して改良が重ねられるとともに、多くの理論的な研究が行われてきています。しかし、低温度差スターリングエンジンが温度差によってどのようなメカニズムで回転するのか、シンプルかつ本質を捉えた物理的な説明は与えられていませんでした。

本研究では、低温度差スターリングエンジンにおけるダイナミクスの特徴を再現するシンプルな運動方程式を導き、エンジンを「温度差で駆動する非線形振り子^{注3)}」として記述しました。エンジンの運動は、回転状態と静止状態のどちらかの安定した状態に落ち着きますが、これらの状態は、方程式の安定なリミットサイクル^{注4)}と安定な固定点^{注5)}として記述できます。回転状態と静止状態は、温度差が十分大きい場合は共存しています。一方、温度差が小さくなり過ぎると、エンジンの回転運動はある温度差で消失してしまうことが知られています。このようなエンジンの回転運動の消失が、非線形力学系の解の分岐^{注6)}現象として捉えられることを示しました。

本研究で得られた成果は、低温度差スターリングエンジンの理解・制御・設計に重要な知見を与えるものであり、本研究の理論的な予測を検証する実験が望まれます。また、今後のスターリングエンジンの研究にもインパクトを与えるものと期待されます。

この研究成果は、平成 30 年 5 月 9 日付の科学雑誌「EPL」オンライン版に掲載されました。

なお、本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業 16K17765 の助成を受けたものです。

【ポイント】

- 低温度差スターリングエンジンのダイナミクスの特徴を再現するシンプルな運動方程式を導出
- エンジンを「温度差で駆動する非線形振り子」として記述
- 温度差を小さくしていったときに起こるエンジンの回転運動の消失を、方程式の安定なリミットサイクルの分岐による消失として説明

【研究背景と内容】

身の回りの熱エネルギーを有効利用するテクノロジーは、今後の持続可能社会の基盤となる重要なテクノロジーの一つです。手のひらの温かさと室温程度の低温度差で動くスターリングエンジンは、こうしたテクノロジーの一つとして注目を集めています。低温度差スターリングエンジンは1980年代にI. Kolin氏（ザグレブ大学）により提案され、Kolin氏とJ. R. Senft氏（ウィスコンシン大学リバーフォールズ校）によって改良・発展しました。一方、低温度差スターリングエンジンの運動メカニズムに関する研究は、機械工学・流体力学・熱力学などを用いた複雑な解析が多く、シンプルかつ本質を捉えた物理的な説明は与えられていませんでした。

本研究では、特にキネマティックエンジン^{注7)}と呼ばれるタイプの低温度差スターリングエンジンを研究しました（図1）。この低温度差スターリングエンジンは、NASAからの依頼でSenft氏が開発したN-92型と呼ばれるエンジンが原型となっています。

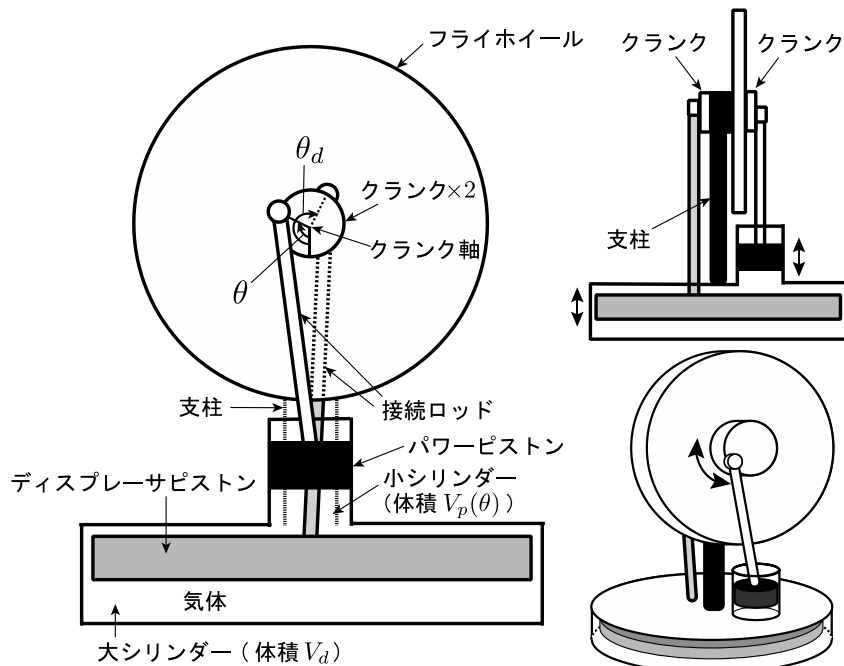


図1 低温度差キネマティックスターリングエンジンの模式図
正面図（左）、側面図（右上）、斜めから見た図（右下）

低温度差キネマティックスターリングエンジンは、つながった大小2つのシリンダーとパワーピストン、ディスプレーサピストンの2つのピストンを備えています。動力部分である小シリンダー内のパワーピストンはロッドを通してクランクに接続されており、往復運動が回転運

動に変換されます。大シリンダー内のディスプレイサピストンは、気体の配置を調整するピストンです。ディスプレイサピストンとシリンダーの壁の間には隙間があり、ディスプレイサピストンの往復運動によって、気体はこの隙間を抜けてシリンダー内を上下に移動します。ディスプレイサピストンはロッドを通して別のクランクに接続されています。二つのクランクは、ディスプレイサピストンに接続されたクランクの回転角 θ_d が、パワーピストンに接続されたクランクの回転角 θ よりも 90 度 ($\pi/2$ ラジアン) だけ先に進んだ角度となるよう固定されており、クランク軸を中心に一つのユニットとして回転します。また、クランクの回転を滑らかにし、安定させる働きをするフライホイールと呼ばれる部品も一緒に取り付けられています。大シリンダーの上面と下面には温度の異なる熱源（例えば上面は低温熱源として周囲の空気、下面は高温熱源として手のひら）が接しており、クランクが回転すると、気体のシリンダー内の往復運動に合わせて気体に接触する熱源が交互に変わる仕組みになっています。

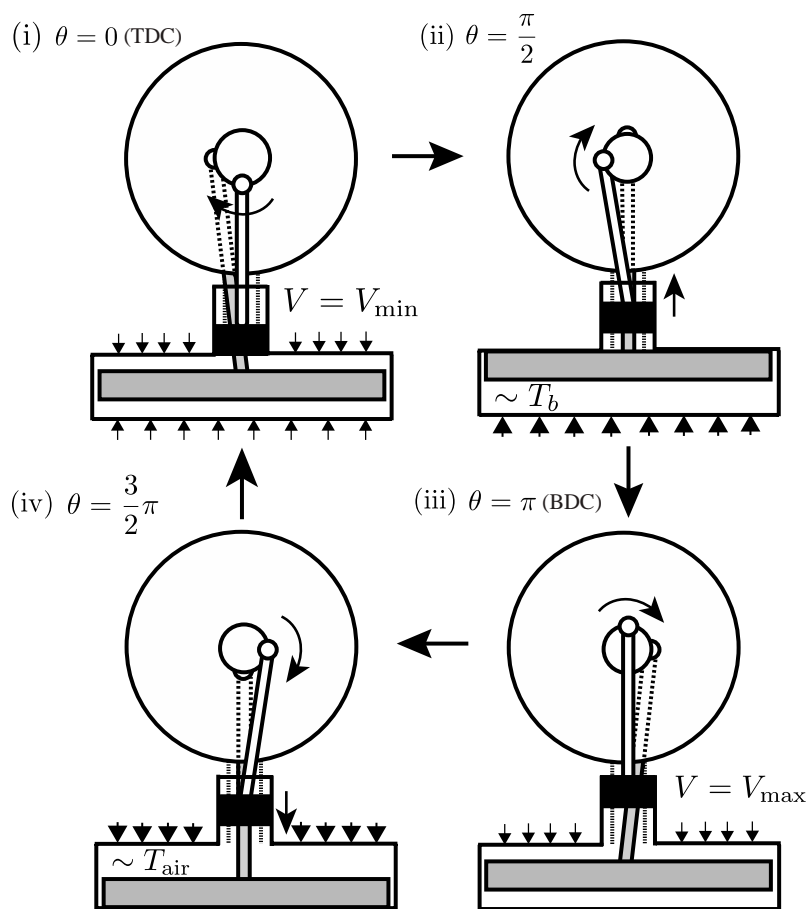


図 2 低温度差キネマティックスターリングエンジンのサイクル過程

(i) → (ii) : 気体の移動過程、(ii) → (iii) : 気体の膨張過程、(iii) → (iv) : 気体の移動過程、
(iv) → (i) : 気体の圧縮過程の 4 つの過程から構成される

この図の場合はシリンダー下面に温度 T_b の高温熱源の手のひらが、上面に温度 T_{air} の低温熱源の空気が接しており、エンジンは時計回りに回転する

図 2 は、高温熱源がシリンダー下面に接する手のひら（温度 T_b ）、低温熱源がシリンダー上面に接する空気（温度 T_{air} ）の場合のエンジンのサイクル過程を表しています。十分な温度差のもと、クランクに時計回り方向の十分な大きさの初期角速度^{注 8)}を与えると、エンジンは時計

回り方向の回転状態に落ち着きます。このサイクル過程は、以下の4つの過程から構成されています。

(i)→(ii)気体の移動過程：パワーピストンが最下点にあり、クランクに力が伝わりませんが、フライホイールの慣性の力を利用して回転します。その後、ディスプレイサピストンが最上点に到達し、気体の多くはシリンダーの下側に移動して手のひらで温められます。

(ii)→(iii)気体の膨張過程：手のひらで温められた気体は膨張してパワーピストンを押します。

(iii)→(iv)気体の移動過程：パワーピストンが最上点にあり、クランクに力が伝わりませんが、フライホイールの慣性の力を利用して回転を持続します。その後、ディスプレイサピストンが最下点に到達し、気体の多くはシリンダーの上面に移動して空気で冷やされます。

(iv)→(i)気体の圧縮過程：空気で冷やされた気体はパワーピストンに圧縮されて元の状態に戻ります。

以上のプロセスを繰り返してエンジンは回転します。一方、十分な温度差が与えられていても、最初にクランクに与える初期角速度が小さ過ぎる場合などは、エンジンは回転せず静止状態に落ち着く場合もあります。また、初期角速度を反時計回りの方向に与えたとしても、反時計回りの回転が持続することはなく、しばらくすると時計回りの回転状態か静止状態に落ち着きます。

このキネマティックエンジンの特徴として、高温・低温熱源の場所が入れ替わると、回転の向きが逆転するという性質があります。例えば、手のひらの上ではなく、氷の上に置くと回転の向きが逆転し反時計回りに回転します（この場合は周囲の空気が高温の熱源となります）。また、温度差が小さくなり過ぎると回転運動が失われてしまいます。

本研究では、以上のエンジンのダイナミクスを再現するシンプルな運動方程式を導出しました。図2から分かるように、クランクと気体の温度は互いに関係しながらダイナミカルに変化します。従って、モデリングには機械工学的なアイデアと熱力学的なアイデアが必要となります。まず、クランクの回転角 θ の時間変化を記述する運動方程式を機械工学に基づき導入します。しかし、この方程式にはパワーピストンを押す気体の圧力が含まれており、気体の圧力を決めるためには気体の温度を決定する必要があります。そこで、気体の温度の時間変化を記述する方程式を熱力学第一法則^{注9)}から構成し、その近似解を求めました。これによりクランクの運動方程式が完成します。

このようにして得られた運動方程式は、エンジンを「温度差で駆動する非線形振り子」として記述することが分かりました。通常の振り子は力学的なトルク^{注10)}を与えることで回転しますが、このエンジンは、そのトルクが生じる原因が温度差（熱力学的な力）であるという著しい特徴があります。また、得られた運動方程式は力学系としては、わずか2次元であり、原理的にこれよりシンプルなモデルは存在しないと言い得るものとなっています。

エンジンの落ち着く安定な運動状態には回転状態と静止状態があります。これに対応して、適当な初期条件から出発した方程式の解軌道は、十分時間が経過すると、回転状態を表す解（回転解）か静止状態を表す解（静止解）のどちらかの解軌道に落ち着きます。回転解は方程式の安定なリミットサイクルに、静止解は安定な固定点に対応します。図3は、実際の手のひらサイズのエンジン（クランクの1分間の平均回転数が数十から数百回程度）を想定したパラメータを用いた数値計算によって、温度差 $\Delta T = T_b - T_{air}$ を変化させた時のこれらの安定なリミットサイクルと安定な固定点の有無を調べ、解がある場合、クランクの平均角速度を示したダイアグ

ラムです。図から分かるように、十分な大きな温度差では、安定なリミットサイクル、安定な固定点ともに存在する共存状態になっています。また、高温・低温熱源の場所を入れ替えると（ ΔT の正負が変わると）回転の向きが逆転するという性質も再現されています。一方、温度差が小さくなっていくと、ある温度差を境にリミットサイクルが消失することが分かります。つまり、エンジンは回転しなくなってしまいます。リミットサイクルが消失する温度差は 10 ケルビン以下であり、これは実際のエンジンにおける値と近い値です。このようにエンジンの回転運動の消失を、パラメータ（温度差）を変化させたことによる解の分岐現象として捉えられることを示しました。また、この分岐がホモクリニック分岐^{注11)}と呼ばれる分岐であることも示しています。このような分岐シナリオが低温度スターリングエンジンで成立することは、本研究によって初めて提案されたものです。

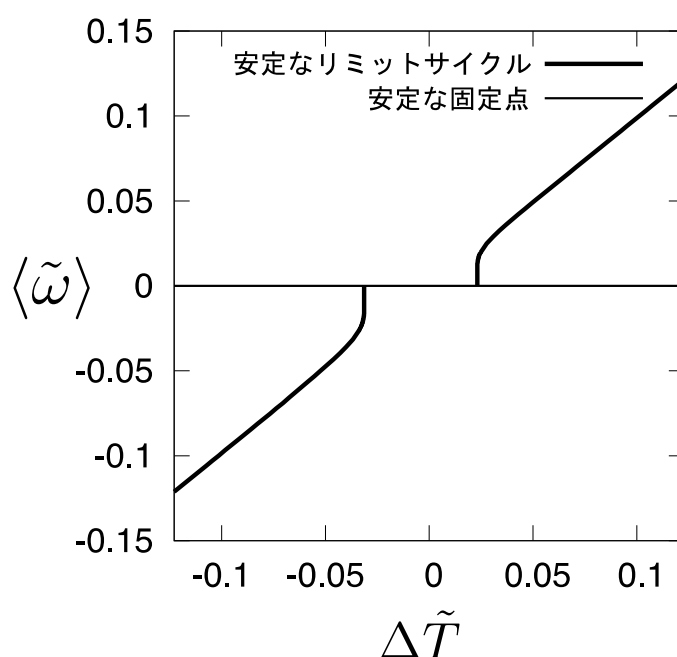


図 3 クランクの平均角速度と温度差 $\Delta T = T_b - T_{air}$ の関係を表すダイアグラム（平均角速度と温度差は無次元化されている）

【成果の意義】

本研究では、低温度差キネマティックスターリングエンジンのシンプルな運動方程式を導出し、エンジンを「温度差で駆動する非線形振り子」として記述しました。本研究で得られた成果は、低温度差スターリングエンジンの理解・制御・設計に役立つことが期待されます。特に、本研究で示された安定なリミットサイクルのホモクリニック分岐による消失は、物理的に妥当なモデルから数学的に自然に導かれた結論であり、今後の実験による検証が望まれます。低温度差スターリングエンジンは、今後の持続可能社会に活用されるポテンシャルを秘めており、本研究がそうした実用的な研究をさらに活性化させる契機となる可能性があります。また、エンジンは通常、熱力学や機械工学の研究対象ですが、非線形力学系として記述することで新しい知見を得ることができました。今後、様々なタイプのエンジンの記述にも本研究のアイデアが応用されることで「エンジンの物理学」の発展に貢献することが期待されます。

【用語説明】

- 注1) スターリングエンジン：19世紀初頭に発明された外燃機関。二つの温度の異なる熱源の間で働く。その熱力学サイクルは、熱の再生器を利用すれば、熱機関の最大効率（カルノー効率）を達成することが知られている。
- 注2) 力学系：状態が時間発展する系のこと。ここでは状態変数の時間発展が1階の常微分方程式系で表される系を考えている。2階の常微分方程式である運動方程式は、2次元の力学系として記述できる。特に、非線形な微分方程式系に従う力学系は非線形力学系と呼ばれる。
- 注3) 温度差で駆動する非線形振り子：エンジンの運動が振り子と同様の運動方程式で記述される。運動方程式が非線形方程式となる振り子を非線形振り子と呼ぶ。また、振り子の回転運動の原因となるのが温度差であり、温度差がないと回転しない。
- 注4) リミットサイクル：力学系の孤立した周期解のこと。
- 注5) 固定点：力学系の時間変化しない解のこと。定常解。
- 注6) 分岐：力学系に含まれるパラメータを変えたときに解の性質・挙動が定性的に変化すること。分岐が起こるパラメータの値は分岐点と呼ばれる。
- 注7) キネマティックエンジン：クランクに接続されたパワーピストン・ディスプレイサピストンの二つのピストンと、つながった二つのシリンダーを利用するタイプのスターリングエンジン。
- 注8) 角速度：回転運動の速度。回転角の時間微分で表される。
- 注9) 熱力学第一法則：系に加えられた熱と系に外部からなされた仕事の和が系の内部エネルギー変化と等しいことを表すエネルギー保存則。
- 注10) トルク：回転運動を引き起こす要因となる量。クランク軸の周りの力のモーメント。
- 注11) ホモクリニック分岐：分岐点でリミットサイクルの一部がサドル点と呼ばれる不安定な固定点に触れて、サドル点をつなぐ周期無限大のホモクリニック軌道が形成される分岐。今の場合、分岐点の近くでは固定点は二つ存在し、 $\theta=0$ が安定な固定点、 $\theta=\pi$ が不安定な固定点（サドル点）に対応する。温度差が徐々に小さくなり分岐点に近づくと、エンジンはクランクの回転を維持することが次第に難しくなる。ついに、分岐点直上では、クランクの軌道は $\theta=\pi$ （図 2(iii)のパワーピストンの位置に対応）を無限の時間をかけて通過して元に戻ってくるようなホモクリニック軌道となり、リミットサイクルが消失する。分岐点より小さな温度差では回転解はなく、エンジンの落ち着く先は静止解のみとなる。

【論文情報】

雑誌名：EPL

論文タイトル：Nonlinear dynamics analysis of a low-temperature-differential kinematic Stirling heat engine

著者名：Yuki Izumida

DOI：[10.1209/0295-5075/121/50004](https://doi.org/10.1209/0295-5075/121/50004)