問　題　紙

1　a，b を実数とする。

(1)　整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　実数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x+b$ とする。b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ。

2　1 つのサイコロを 3 回投げる。1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする。

(1)　$ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ。

(2)　$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ。

3　複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えられている。ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O，A，B，C，D，E とする。互いに異なる 0 でない複素数 α，β，γ が，

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi, \qquad 4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0, \qquad 2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$$

を満たし，α，β，γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする。

(1)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ。

(2)　組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ。

4　関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ を満たすとする。ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1<x_2$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つときをいう。以下，n は正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx=\infty$ を示せ。

(2)　区間 $y>2$ において関数 $F_n(y)$ を $\displaystyle F_n(y)=\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{f(x)}{x-2}\,dx$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{y\to\infty}F_n(y)=\infty$ を示せ。また $2+\dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n}\frac{f(x)}{2-x}\,dx=0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3)　(2) の a_n について，不等式 $a_n<4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ。