# 問　題　紙

**1**　関数$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ (x>0)$に対して，$y=f(x)$のグラフを$C$とする。

(1)　$f(x)$の極値を求めよ。

(2)　$x$軸上の点$\mathrm{P}(t,\ 0)$から$C$にちょうど2本の接線を引くことができるとする。そのような実数$t$の値の範囲を求めよ。

(3)　(2)において，$C$の2つの接点の$x$座標を$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とする。$\alpha,\ \beta$がともに整数であるような組$(\alpha,\ \beta)$をすべて求めよ。

**2**　$c$を1より大きい実数とする。また，$i$を虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$とおく。複素数$z$に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\quad Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める。

(1)　方程式$P(z)=0$を満たす複素数$z$をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2)　方程式$Q(z)=0$を満たす複素数$z$のうち実部が最大のものを求めよ。

(3)　複素数$z$についての2つの方程式$P(z)=0$，$Q(z)=0$が共通解$\beta$を持つとする。そのときの$c$の値と$\beta$を求めよ。

**3**　座標空間の3点$\mathrm{A}(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}(4,\ 0,\ 1)$の定める平面を$H$とする。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad (s,\ t\text{は非負の実数})$$

を満たすすべての点Pからなる領域を$K$とする。

(1)　内積$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を求めよ。

(2)　原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$から平面$H$に下ろした垂線の足をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で表せ。

(3)　領域$K$上の点Pに対して，線分QP上の点で$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$r$は非負の実数）を満たす点Rが存在することを示せ。

(4)　領域$K$において原点Oからの距離が最小となる点Sの座標を求めよ。

**4**　袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を$p\ (0\leqq p\leqq 1)$とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を$n$回行うとき，赤玉を$k$回以上取り出す確率を$f(k)$とおく。

(1)　$n\geqq 2$に対して，$f(1)$と$f(2)$を求めよ。

(2)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$に対して，等式

$$f(k)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を示せ。

(3)　自然数$k$に対して，定積分

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}x^k(1-x)^k\,dx$$

を求めよ。

# 数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の 2 点 $x_1$，$x_2$ を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点$(x_1, y_1)$と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点$(x_1, y_1, z_1)$と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$(x_1, y_1)$における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$(x_1, y_1)$における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2 + px + q = 0$の解が$\alpha$，$\beta$のとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$の解が$\alpha$，$\beta$，$\gamma$のとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　　数）

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$

21. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　　列）

23. 初項$a$，公差$d$，項数$n$の等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a+\ell) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n-1)d\right\}$，$(\ell = a + (n-1)d)$

24. 初項$a$，公比$r$，項数$n$の等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r \neq 1)$

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　　限）

26. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　積　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$のとき $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

33. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x\, dx = x\log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　率）

41. 確率 $p$ の事象が $n$ 回の試行中 $r$ 回起こる確率：$P_n(r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

42. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし $p_i$ は確率変数 $X$ が値 $x_i$ をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。