問　題　紙

1　正の実数 p に対して，xy 平面において $y=x^2+p$ で定まる放物線を Q とする。a を実数とし，点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ から Q に引いた2本の接線の接点を $\mathrm{B}(b,\ b^2+p)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2+p)$（ただし $b<c$）とする。また $\theta=\angle\mathrm{CAB}$（ただし $0<\theta<\pi$）とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b，c を p，a を用いて表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，p を a を用いて表せ。

(3)　$\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta$ を p，a を用いて表せ。

(4)　$\theta\geqq\dfrac{\pi}{3}$ がすべての実数 a に対して成り立つための，p の範囲を求めよ。

2　整数の組 $(a,\ b,\ c)$ に対して，次の条件（$*$）を考える。

（$*$）　a，b，c は1以上の整数であり，a と b の最大公約数，a と c の最大公約数，b と c の最大公約数はそれぞれ1である。

以下の問いに答えよ。ただし，組 $(a,\ b,\ c)$ と $(d,\ e,\ f)$ は $a=d$，$b=e$，$c=f$ のとき，かつこのときに限り等しい。

(1)　条件（$*$）かつ $abc=120$ をみたす組 $(a,\ b,\ c)$ のうちで，$a\leqq b\leqq c$ をみたすものをすべて求めよ。

(2)　条件（$*$）かつ $abc=120$ をみたす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めよ。

(3)　N を2以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件（$*$）かつ $abc=N!$ をみたす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を m を用いて表せ。

3　xy 平面上を次の規則(i)，(ii)に従って移動する点Aを考える。

(i)　時刻0で点Aは原点にある。

(ii)　ある時刻において点Aが $(x,\ y)$ にあるとき，時刻が1増えると点Aは3点 $(x+1,\ y)$，$(x+1,\ y+1)$，$(x,\ y+1)$ のいずれかにそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する。

1以上の整数 n に対して，次の条件（$*$）が成り立つ確率を P_n とする。

（$*$）　時刻0から時刻 n まで点Aはつねに $-1\leqq y-x\leqq 1$ で定まる領域にある。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_2，P_3 を求めよ。

(2)　1以上の整数 n に対して，条件（$*$）が成り立ちかつ時刻 n で点Aが直線 $y-x=0$ 上にある確率を a_n とする。また，条件（$*$）が成り立ちかつ時刻 n で点Aが直線 $y-x=1$ 上または直線 $y-x=-1$ 上にある確率を b_n とする。a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(3)　P_{n+2} を P_{n+1}，P_n を用いて表せ。

(4)　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ とおくとき，

$$P_n\leqq\alpha^{n-1}$$

が1以上のすべての整数 n に対して成り立つことを証明せよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の2点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$(r=|z|,\ \theta=\arg z)$

12. $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$に対し，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2+px+q=0$の解がα，βのとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

15. $x^3+px^2+qx+r=0$の解がα，β，γのとき，$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

16. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

20. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$

21. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+\ell)=\dfrac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)d\right\}$，$(\ell=a+(n-1)d)$

24. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r\neq 1)$

25. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　　限）

26. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　積　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

33. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x\, dx = x\log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起こる確率：$P_n(r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1-p)$

42. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。