問　題　紙

1　実数係数の4次方程式$x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$は相異なる複素数α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$を解に持ち，それらは全て複素数平面において，点1を中心とする半径1の円周上にあるとする。ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$はそれぞれα，βと共役な複素数を表す。

(1)　$\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$を示せ。

(2)　$t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$とおく。$p$，$q$，$r$，$s$をそれぞれ$t$と$u$で表せ。

(3)　座標平面において，点$(p,\ s)$のとりうる範囲を図示せよ。

2　$0<b<a$とする。xy平面において，原点を中心とする半径rの円Cと点$(a,\ 0)$を中心とする半径bの円Dが2点で交わっている。

(1)　半径rの満たすべき条件を求めよ。

(2)　CとDの交点のうちy座標が正のものをPとする。Pのx座標$h(r)$を求めよ。

(3)　点$\mathrm{Q}(r,\ 0)$と点$\mathrm{R}(a-b,\ 0)$をとる。Dの内部にあるCの弧PQ，線分QR，および線分RPで囲まれる図形をAとする。xyz空間においてAをx軸の周りに1回転して得られる立体の体積$V(r)$を求めよ。ただし，答えに$h(r)$を用いてもよい。

(4)　$V(r)$の最大値を与えるrを求めよ。また，そのrを$r(a)$とおいたとき，$\lim_{a\to\infty}(r(a)-a)$を求めよ。

3

(1)　方程式$e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}$の負の実数解の個数を求めよ。

(2)　$y=x(x^2-3)$と$y=e^x$のグラフの$x<0$における共有点の個数を求めよ。

(3)　aを正の実数とし，関数$f(x)=x(x^2-a)$を考える。$y=f(x)$と$y=e^x$のグラフの$x<0$における共有点は1個のみであるとする。このようなaがただ1つ存在することを示せ。

4　nを正の整数とし，n次の整式$P_n(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1)$を展開して$P_n(x)=\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m x^m$と表す。

(1)　等式$\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m=n!$を示せ。

(2)　等式

$$P_n(x+1)=\sum_{m=1}^{n}\left({}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_m x^m\right)$$

を示せ。ただし，${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_m$は二項係数である。

(3)　$k=1,\ 2,\cdots,\ n$に対して，等式$\sum_{j=k}^{n}{}_n\mathrm{B}_j\cdot{}_j\mathrm{C}_k={}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$を示せ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m : n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$(r=|z|,\ \theta=\arg z)$

12. $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$に対し，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2+px+q=0$の解がα，βのとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

15. $x^3+px^2+qx+r=0$の解がα，β，γのとき，$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

16. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

20. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$

21. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+\ell)=\dfrac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)d\right\}$，$(\ell=a+(n-1)d)$

24. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r\neq 1)$

25. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　　　限）

26. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　積　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$のとき $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

33. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1-p)$

42. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。