

問 題 紙

1 点 O を原点とする xy 平面において、曲線 $y = \frac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分を C とし、 C 上の 2 点 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ (ただし $0 < a < 1$, $a < b$) を考える。 $\theta = \angle BOA$ とおき、2 直線 OA , OB と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) S を a, b を用いて表せ。
- (2) $\theta = \frac{\pi}{4}$ であるとき、 b を a を用いて表せ。
- (3) 2 点 A, B が C 上を $\theta = \frac{\pi}{4}$ をみだしながら動くとき、 S の最小値を与える a の値を求めよ。

2 a を実数とする。空間内の 3 点 $A(2, 1, 3)$, $B(a+2, 3, 4)$, $C(1, 0, 0)$ を含む平面を H とし、2 点 $D(-1, 2, 1)$, $E(-3, 1, 0)$ を通る直線を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 H が直線 DE と共有点をもつための、 a の条件を求めよ。
- (2) 平面 H が線分 DE (両端を含む) と共有点をもつための、 a の条件を求めよ。

3 整数の組 (a, b, c) に対して、次の条件(*)を考える。

(*) a, b, c は 1 以上の整数であり、 a と b の最大公約数、 a と c の最大公約数、 b と c の最大公約数はそれぞれ 1 である。
以下の問いに答えよ。ただし、組 (a, b, c) と (d, e, f) は $a = d, b = e, c = f$ のとき、かつこのときに限り等しい。

- (1) 条件(*)かつ $abc = 120$ をみたす組 (a, b, c) のうちで、 $a \leq b \leq c$ をみたすものをすべて求めよ。
- (2) N を 2 以上の整数とし、 N 以下の素数の個数を m とする。条件(*)かつ $abc = N!$ をみたす組 (a, b, c) の個数を m を用いて表せ。
- (3) N を 2 以上の整数とし、 N 以下の素数の個数を m とする。条件(*)かつ $abc = N!$ をみたす組 (a, b, c) のうちで、 $a \leq b \leq c$ をみたすものの個数を m を用いて表せ。

4 xy 平面上を次の規則(i), (ii)に従って移動する点 A を考える。

- (i) 時刻 0 で点 A は原点にある。
- (ii) ある時刻において点 A が (x, y) にあるとき、時刻が 1 増えると点 A は 3 点 $(x+1, y)$, $(x+1, y+1)$, $(x, y+1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する。

1 以上の整数 n に対して、次の条件(*)が成り立つ確率を P_n とする。

(*) 時刻 0 から時刻 n まで点 A はつねに $-1 \leq y - x \leq 1$ で定まる領域にある。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) P_1, P_2, P_3 を求めよ。
- (2) 1 以上の整数 n に対して、条件(*)が成り立ちかつ時刻 n で点 A が直線 $y - x = 0$ 上にある確率を a_n とする。また、条件(*)が成り立ちかつ時刻 n で点 A が直線 $y - x = 1$ 上または直線 $y - x = -1$ 上にある確率を b_n とする。 a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。
- (3) P_{n+2} を P_{n+1}, P_n を用いて表せ。
- (4) $a = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ とおくと、

$$P_n \leq a^{n-1}$$

が 1 以上のすべての整数 n に対して成り立つことを証明せよ。

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または0)
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5. $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分する点, および外分する点: $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$
7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:
 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
8. 円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(ベ ク ト ル)

10. 2つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

(複素数)

11. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
12. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
13. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対数)

16. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三角関数)

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
18. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
19. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
20. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$
21. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
22. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数列)

23. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + \ell) = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\}$, ($\ell = a + (n-1)d$)
24. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$28. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$29. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$30. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$31. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$32. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$33. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$34. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$$

$$35. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$36. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} (a \neq 0), \int_a^\beta (x - a)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta - a)^3$$

$$37. \text{回転体の体積} : V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$38. \text{曲線の長さ} : \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$39. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$40. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$41. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起こる確率} : P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1 - p)$$

$$42. \text{期待値} : E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$