# 問　題　紙

**1**　$a$ を実数とし，関数 $f(x) = x^2 + ax - a$ と $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ を考える。関数 $y = F(x) - f(x)$ のグラフが $x$ 軸と異なる3点で交わるための $a$ の条件を求めよ。

**2**　非負の整数 $n$ に対して $\mathrm{P}_n$ を $xy$ 平面上の点とする。$\mathrm{P}_0$ の座標を $(1, 0)$ とし，$\mathrm{P}_n$ の座標 $(x_n,\ y_n)$ と $\mathrm{P}_{n+1}$ の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ は

$$x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1})$$
$$y_{n+1} = y_n + k(x_n + x_{n+1})$$

をみたすとする。ただし $k$ を正の実数とする。

(1)　$k = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とする。ただし $0 < \alpha < \pi$ とする。このとき $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を $\alpha$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{P}_n$ の座標 $(x_n,\ y_n)$ を(1)の $\alpha$ と $n$ を用いて表せ。

(3)　O を $xy$ 平面の原点とするとき，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を $k$ を用いて表せ。

**3**　1つのサイコロを3回投げる。1回目に出る目を $a$，2回目に出る目を $b$，3回目に出る目を $c$ とする。なお，サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。

(1)　2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ。

(2)　2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ のすべての解が整数である確率を求めよ。

(3)　2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ。

# 数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）
2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の 2 点 $x_1$，$x_2$ を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$
7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
   $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$
9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が $\alpha$，$\beta$ のとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ のとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　数）

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

21. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

22. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項 $a$，公差 $d$，項数 $n$ の等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + l) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n - 1)d\right\}$，$(l = a + (n - 1)d)$

24. 初項 $a$，公比 $r$，項数 $n$ の等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，$(r \fallingdotseq 1)$

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$

（極　　　　　限）

26. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　　積　　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$

33. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2\,(a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\,(a \fallingdotseq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　　率）

41. 確率 $p$ の事象が $n$ 回の試行中 $r$ 回起る確率：$P_n(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

42. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし $p_i$ は確率変数 $X$ が値 $x_i$ をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。